Cuprins

I. Elemente de algebră

II. Elemente de analiză matematică

Definiție. Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „$*$“ asociativă și cu element neutru e.

Spunem că un *element* $x \in M$ este *simetrizabil* în raport cu legea de compoziție „$*$“ (asociativă și cu element neutru), dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$. Elementul x' cu această proprietate se numește simetricul (inversul sau opusul) lui x.

Proprietate. Dacă un element este simetrizabil, atunci admite un unic element simetric.

Demonstrație. Fie $x',\ x'' \in M$ care verifică aceeași proprietate: $x' * x = x * x' = e$ și $x'' * x = x * x'' = e$. Avem

$x'' = x'' * e = x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$. ■

În notație multiplicativă simetricul lui x, dacă există, se notează x^{-1} și se numește *inversul lui* x, $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$; în notație aditivă se notează $-x$ și se numește *opusul lui* x, $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

Observație. Dacă operația $*$ pe mulțimea M nu este asociativă atunci este posibil ca să existe un element $x \in M$, care are un element simetrizabil la stânga x' și alt element simetrizabil x''.

În acest caz: $(x' * x) * x'' = e * x'' = x''$, $x' * (x * x'') = x' * e = x'$, dar $(x' * x) * x'' \neq x' * (x * x'')$ operația $*$ nefiind asociativă.

Observație. Elementul neutru e are simetricul tot e, $e * e = e$.

În notație multiplicativă avem $1^{-1} = 1$.

În notație aditivă avem $-0 = 0$.

EXEMPLU

Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este simetrizabilă (inversabilă) în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Într-adevăr, $\det(A) = 2 \neq 0$. Atunci există $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Avem $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^{-1}A$

Teoremă. Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție „$*$“ (asociativă și cu element neutru), atunci $x * y$ și x' sunt simetrizabile. În plus avem:

(1) $\boxed{(x * y)' = y' * x'}$; (2) $\boxed{(x')' = x}$.

În scriere multiplicativă (1) și (2) devin $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $(x^{-1})^{-1} = x$, iar în cea aditivă $-(x + y) = (-y) + (-x)$, $-(-x) = x$.

Demonstrație. Avem: $(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * (x * y)) = y' * ((x' * x) * y) = y' * (e * y) = y' * y = e$ și analog $(x * y) * (y' * x') = e$. Rezultă că $x * y$ este simetrizabil și deci $(x * y)' = y' * x'$. Din $x' * x = x * x' = e$, rezultă că x' este simetrizabil și $(x')' = x$. ■

15) Fie următoarele legi de compoziție definite cu ajutorul tabelelor:

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	p	q
p	p	q	n	m
q	q	p	m	n

$\circ$	α	β	γ	δ	ε
α	ε	α	δ	β	γ
β	α	β	γ	δ	ε
γ	δ	γ	α	ε	β
δ	β	δ	ε	γ	α
ε	γ	ε	β	α	δ

Pentru fiecare dintre aceste legi de compoziție, scrieți care este elementul neutru și apoi scrieți care este simetricul fiecărui element.

16) Folosiți tabla compunerii funcțiilor $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ pentru a arăta că funcțiile e și f sunt simetrizabile.

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

17) Studiați existența elementelor simetrizabile pentru următoarele legi de compoziție:

a) $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0, 1)$;

b) $x * y = xy - 4x - 4y + 20$ pe $(4, \infty)$;

c) $x * y = \dfrac{4xy + 3}{4x + 4y + 4}$ pe $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$;

d) $x * y = x^2y$ pe $\mathbb{R}$;

e) $x * y = x^{\ln y}$ pe $(0; \infty)$;

f) $x * y = e^{\ln x \ln y}$ pe $(0; \infty)$.

Indicație.

a) $\forall x \in (0, 1)$, avem: $x * x' = e$, $\dfrac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \dfrac{1}{2}$, $x' = 1 - x \in (0, 1)$.

Analog, $x' * x = e$, $x' = 1 - x \in (0, 1)$.